

Observations générales

Le problème proposé ne présentait pas de grandes difficultés. L'énoncé limpide guidait les candidats pas à pas et n'a conduit à aucune hésitation ni trouble.

Les constatations que l'on peut faire sur la qualité des candidats sont assez contrastées : certains résultats essentiels comme « polynôme annulateur scindé à racines simples \Rightarrow diagonalisable » ou le théorème de Cayley Hamilton semblent bien connus. Le « théorème du rang » a beaucoup moins de succès et a été très souvent fort mal utilisé.

Un très grand nombre de candidats semble être allergique à tous les termes mathématiques se terminant par « isme » : morphisme, automorphisme et surtout isomorphisme.

Les notions fondamentales d'injectivité, surjectivité se sont pas naturelles pour trop de candidats.

La rigueur semble être une vertu qui n'est plus à la mode et la logique basique est méprisée : pour obtenir une équivalence il suffit d'une implication.

Remarques détaillées par question

Partie I – Etude d'un exemple

1. Pratiquement tout le monde a obtenu l'équation vérifiée par A , soit par calcul, soit en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
2. A sous-algèbre de $M_2(\mathbb{R})$ est plutôt bien traité. La dimension 2 n'a pas eu le même succès et a été l'occasion de quelques monstruosité ($M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 2).
3. Cette question a été victime du manque de rigueur de beaucoup. Certains traitent l'équation matricielle comme une équation réelle ou complexe du second degré, d'autres pensent que le polynôme annulateur est unique...
4. (I_2, B) famille libre est assez souvent correctement établi. L'isomorphisme d'algèbre n'a pas cette chance.
5. et 6. Ces deux questions ont été plus réussies que les deux précédentes en particulier l'isomorphisme a eu un meilleur sort.
7. Les deux tiers des candidats ont bien justifié la diagonalisabilité. L'isomorphisme d'algèbre est souvent considéré comme une conséquence de la question 6. Souvent l'ensemble des matrices diagonales est considéré comme étant un corps.

Partie II – Quelques résultats généraux

1. Cette question est généralement bien traitée mais le lien avec 4c) souvent ignoré.
2. Question caractérisée par un flou artistique, un manque de rigueur même si l'essentiel est bien perçu. Souvent il y a confusion entre multiplication par un scalaire et multiplication par un élément de l'algèbre. Pour l'injectivité, l'élément neutre pour l'addition et l'élément neutre pour la multiplication sont parfois confondus.
3. Souvent la matrice est convenablement écrite. On a rencontré quelques formes surprenantes.
4. a) Souvent sauté mais en général bien traité quand il est abordé.
 - b) a) est utilisé même s'il n'a pas été traité.
 - c) C'est la partie la plus souvent traitée de cette question. Pour l'injectivité pas de problème en général mais la dimension finie est souvent omise pour passer à la bijectivité. Pour quelques candidats une algèbre intègre est nécessairement un corps.

Partie III – L’algèbre des quaternions

1. Question sautée par un candidat sur deux environ. En général bien traitée lorsqu’elle est abordée.
2. En général bien traitée. Les produits ne sont pas toujours tous déterminés.
3. Cette question a eu beaucoup de succès ; le résultat est souvent entaché d’erreurs de signes.
4. En général bien traitée s’il n’y a pas eu d’erreur à la question précédente.
5. Le a) comme la question 3 a séduit le plus grand nombre. On note une certaine réticence à utiliser les produits par blocs. Souvent seule la dernière égalité est vérifiée. Le lien entre M^{-1} et tM est inaccessible à ceux qui n’ont pas traité la question 3).

Partie IV – Les automorphismes de l’algèbre des quaternions

1. L’espace vectoriel est généralement bien traité. Une base de L est obtenue sauf par ceux qui ont commis une erreur dans III.5b). La dimension est obtenue sans trop de difficulté ainsi que la non appartenance de I_4 à L .
2. Le résultat de cette question est le plus souvent admis. Ceux qui traitent la question le font convenablement.
3. Beaucoup de candidats qui sont arrivés jusque là établissent l’implication (grâce à la question précédente). La réciproque est souvent ignorée.
4. Assez souvent bien traitée.
5. a) On arrive en général à la conclusion $M = N$ ou $M = -N$ ce qui implique que si $M = N$, I_4 convient. L’autre cas est en général oublié ou mal traité.
b) La vérification est le plus souvent effectuée de façon satisfaisante par ceux qui ont traité la partie directe de 3). La non nullité de P est rarement démontrée.
6. Quelques étudiants ont abordé cette question mais en général sans en achever la démonstration sans doute par manque de temps.
7. C’est la seule question délicate du problème. Elle a été rarement abordée et jamais traitée complètement.

Conclusion

Le problème, dont l’énoncé guidait les candidats pas à pas, laissait peu de place à l’initiative ; d’une longueur très convenable il ne nécessitait pas de connaissances très sophistiquées et la seule vraie difficulté se situait tout à la fin.

La première partie a été traitée de façon globalement décevante, mettant en évidence de graves lacunes sur des propriétés basiques.

Le deuxième partie donne un peu la même impression.

La troisième partie a eu le plus de succès, peut être à cause de son côté plus calculatoire.

La quatrième partie est le plus souvent ignorée et quelques fois à peine abordée.

Les questions pouvant être traitées indépendamment, grâce à l’énoncé, de nombreux candidats ont pu « grappiller » des points ça et là.

Problème assez sympathique pour les candidats.

La moyenne de l’épreuve est de **9,35** et l’écart type est de **3,92**.