

**RAPPORTS**

**SUR**

**LES EPREUVES ECRITES**

## Observations générales

Le problème proposait dans un premier temps une légère étude théorique des produits infinis et cherchait ensuite à calculer la valeur de certains produits proposés en exemple dans la première partie. Il couvrait une très grande partie du programme d'analyse de la classe de MP ; on y retrouvait des questions de cours (en particulier la fonction  $\Gamma$ ) et des questions assez classiques que les candidats auront certainement rencontré en exercice ou en devoir lors de leur année de préparation. Le texte était clair et précis et les candidats pouvaient aborder un grand nombre de questions dont certaines étaient assez simples. Quelques étudiants ont réussi à faire le sujet en entier. En revanche, un nombre sans doute trop important de futurs ingénieurs ne maîtrise peu ou pas les bases de l'analyse. En résumé, c'est un sujet qui a joué son rôle et permis de bien classer les candidats.

## Un certain manque de rigueur

On notera un manque de rigueur parfois assez important. On oublie de vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés, on ne cite pas les noms de ces théorèmes et par moment le correcteur a du mal à deviner quel théorème le candidat a voulu utiliser. Un trop grand nombre d'étudiants est très mal à l'aise lorsqu'il s'agit de chercher des équivalents et d'utiliser des développements limités mais aussi avec les séries de Fourier et ses théorèmes de convergence et malheureusement avec la convergence uniforme (on oublie d'ailleurs parfois de dire sur quel ensemble on dispose de cette convergence uniforme). Lorsqu'un calcul est mené, le ou les cas particuliers sont assez souvent oubliés. Un manque de rigueur aussi dans l'écriture, on voit souvent :  $g(t)$  continue,  $f$  intégrable « en 0 »,  $\frac{1}{t^2}$  intégrable,  $\|f(x)\|_\infty$ ,  $\exists$  barré,  $\ln \sum u_n \dots$

## Quelques conseils

Voici enfin quelques conseils pour les futurs candidats. Commencez l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet, vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte et voir par exemple qu'à la question 14 vous avez une piste de réponse à la question 4c. Evitez d'écrire au crayon, évitez d'arriver à un résultat, qui est dans le sujet, de manière frauduleuse cela peut agacer le correcteur. On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail. Par ailleurs, on précise qu'une bonne réponse peut parfois tenir en une ou deux lignes, il est donc inutile de « remplir » sa copie et ainsi perdre un temps précieux par peur de ne pas en dire assez. Bien sûr, c'est aussi perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse. Enfin, le préambule indiquait comment réagir si l'on rencontrait une erreur d'énoncé, cela ne voulait pas dire qu'il y en avait une : un nombre non négligeable d'étudiants a trouvé une erreur...

## Remarques détaillées par question

1. Quelques confusions entre condition nécessaire et condition suffisante. Il s'agissait de prouver :  $\prod_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Rightarrow \lim u_n = 1$ .
2. a. Le résultat : «  $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$  » ne répond pas à la question !  
b. Réponses souvent trop longues pour cette question sans grande difficulté.

3. a. On oublie souvent la continuité des fonctions  $\ln$  ou  $\exp$ . On affirme que «  $\ln(1+u_n) \sim u_n$  » sans aucune justification.  
 b. On utilise trop souvent les équivalents de termes généraux de séries sans préciser que le signe est constant.

4. a. Il est inutile de redémontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge ! Il faut éviter d'écrire

$$\left\langle \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{4n^2} \right\rangle !$$

- b. Là aussi éviter «  $\frac{x^2}{n^2\pi^2} \sim \frac{1}{n^2}$  ».

- c. Trop de candidats veulent le trouver divergent (peut-être parce que les deux exemples précédents étaient convergents) et s'y emploient.

On voit : «  $\ln \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right) = -\frac{x}{n} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$  » ! ou encore : «  $\prod \left(1 + \frac{x}{n}\right)$  et  $\prod e^{-\frac{x}{n}}$

divergent et donc  $\prod \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$  diverge » !

On voit trop souvent : «  $\ln(1+u) = u - u^2 + o(u^2)$  » ! !

La question 14 donnait une idée de la réponse. La moitié des candidats ont obtenu une note 0 à cette question.

5. a. Zéro point si on n'utilise pas un produit infini.

- b. Oubli fréquent de la justification  $|q| < 1$  pour calculer la somme géométrique  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ .

- c. Question rentable et faisable mais qui a fait fuir beaucoup de candidats. Les étudiants qui s'y sont intéressés ont, en général, trouvé la solution. 56,5 % des candidats ont obtenu la note 0 à cette question.

6. Le théorème de convergence de la série de Fourier est souvent oublié ou mal énoncé.

7. a.\* Pour  $g$  continue : moyenne étonnamment faible pour cette question facile mais bâclée. On voit souvent des sommes d'équivalents, par exemple :

$$\left\langle \cotan t \sim \frac{1}{t} \Rightarrow \cotan t - \frac{1}{t} \sim 0 \right\rangle ! !, \text{ des développements limités peu maîtrisés (il fallait}$$

trouver  $g(t) = \frac{-t}{3} + o(t)$ , on écrit que la fonction  $g$  est prolongeable par continuité en 0 alors que cette fonction est définie en 0 ( $g(0) = 0$ ). On ne peut que conseiller aux étudiants de mieux traiter ce genre de question qui a fait perdre des points inutilement à beaucoup.

- \* Pour le calcul de l'intégrale : on oublie souvent le problème en 0, on voit

$$\left\langle \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \cotan t dt - \int_0^x \frac{1}{t} dt \right\rangle \text{ sans se soucier de l'intégrabilité de la fonction}$$

$t \mapsto \frac{1}{t}$  sur l'intervalle  $]0, x]$  (que certains trouvent même intégrable ! !).

- b. On oublie souvent le cas  $t = 0$ .

- c. C'est sur ce genre de question que l'on constate que la convergence uniforme est mal maîtrisée. Soit on l'oublie complètement et on intervertit  $\int$  et  $\sum$  sans souci, soit on ne sait pas la démontrer, soit on manipule très mal les inégalités. On majore parfois à l'intérieur d'une valeur absolue et on voit aussi «  $\left| \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \right| \leq \frac{2t}{n^2\pi^2}$  ». Notons que l'on pouvait utiliser la convergence normale du théorème de convergence de la série de Fourier (question 6) pour en déduire la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .
8. Il suffisait de choisir  $x = \frac{\pi}{2}$ .
9. Cette question de cours classique a donné des résultats décevants !! Que de perte de points ici !
- a. On oublie de préciser que la fonction est d'abord continue sur  $]0, +\infty[$  et de parler de son signe, là encore on voit des équivalents hasardeux «  $e^{-t} t^{x-1}$  équivaut en  $+\infty$  à  $e^{-t}$  ».
- b. On donne parfois la réponse  $\Gamma(1) = 1$  sans le moindre détail.
- c. Peu de bonnes réponses, la domination locale est peu utilisée et manque de rigueur : confusion entre  $x \mapsto f(x, t)$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $(x, t) \mapsto f(x, t)$ .
- 10.a. Il suffisait d'utiliser la relation  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x = \frac{-t}{n} \in [0, 1]$ , il est en général apprécié de la justifier par convexité...
- b. Le théorème de convergence dominée est peu utilisé et on omet parfois de citer son nom. On voit «  $\lim f_n(t) = e^{-t} \Rightarrow f_n(t) \leq e^{-t}$  ».
- 11.a. Quelques erreurs de signe. Afin de faciliter la lecture des correcteurs il est préférable de préciser le détail de l'intégration par parties.
- b. On voit parfois, pour  $x$  réel, «  $x!$  ».
- 12.a. Quelques tentatives de réponses frauduleuses.
- c. Certes, cette intégrale n'est pas « au programme » mais on considère que sa réponse est classique. Aussi les copies n'ayant pas trouvé le résultat :  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  n'ont pas eu de points.
- 13.a. C'est du cours, il suffisait de dire que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est continue, positive et décroissante sur  $]0, +\infty[$ .
- b. Certains candidats présentent ce résultat comme acquis.
14. Peu abordé.
- 15.a. Le théorème de dérivation sous le signe somme est mal connu.
- b. On doit arriver à :  $\int_0^\infty \ln t e^{-t} dt = -\gamma$ .

Plus de 60 % des candidats n'abandonnent pas les questions 12, 13, 14 et 15. Il y obtiennent la note 0.

La moyenne de l'épreuve est de **8.84** et l'écart type est de **3.86**.