I - Modalités de l'épreuve

Organisation pratique

L'épreuve orale de mathématiques de la session 2018 dure une heure et se compose de deux parties de durées égales : une première phase de préparation d'une durée d'une demi-heure et une seconde phase d'interrogation au tableau. Chaque sujet comporte deux exercices indépendants, portant sur des thèmes distincts du programme de première ou de deuxième année de TSI. Les exercices proviennent d'une banque commune à l'ensemble des examinateurs. Ils sont conçus pour aborder plusieurs pans du programme. Un des deux exercices est guidé question par question et rédigé de façon progressive, afin que tout candidat sérieux puisse raisonnablement aborder cet exercice. Le deuxième exercice est plus ouvert et est l'occasion d'une présentation des pistes de recherche, des résultats et des expériences du candidat.

Pendant l'oral, l'interrogateur prend des notes à l'aide d'un ordinateur. Cela ne l'empêche aucunement d'être attentif au discours du candidat.

Calculatrice

La calculatrice personnelle n'est autorisée dans aucun sujet de mathématiques pour cette session. Ce choix s'appuie sur une volonté d'égalité entre les candidats en termes de matériel numérique.

Notation et attendus

La notation des prestations des candidats porte sur les compétences mathématiques apparaissant dans les programmes de CPGE aussi bien en première année qu'en deuxième année.

Les examinateurs sont particulièrement attentifs à la connaissance des définitions fondamentales (par exemple, valeur propre, convergence d'une série ou d'une intégrale, définition d'un noyau, d'une image, etc.) et à la précision des énoncés des théorèmes principaux du cours. Il est bon de rappeler qu'un énoncé de théorème contient des hypothèses et un résultat avec des termes précis.

S'il est important de connaître des méthodes et de développer des automatismes permettant de répondre aux différentes questions posées, l'oral permet de tester systématiquement si ces méthodes reposent sur une compréhension solide des concepts.

Ces dispositions seront reconduites pour la session 2019.

II - Remarques générales

La moyenne de l'épreuve est satisfaisante et s'inscrit dans la lignée des années antérieures.
Le sérieux des candidats a été apprécié par les examinateurs : ponctualité, politesse, qualité de la présentation de l'exposé oral. Pour certains, la méconnaissance du cours rend extrêmement difficile un exposé cohérent : sans connaissances de base, il ne peut y avoir une progression dans le traitement des questions.
Les candidats sont souvent enthousiastes à l'idée de faire un calcul ou d'appliquer une méthode bien précisée dans le cours. Il ne faut néanmoins pas que ceci soit fait au détriment de l'observation du problème posé.
L'exercice ouvert est le moment privilégié où une discussion peut s'instaurer entre le candidat et l'examinateur. Sa finalité n'est pas l'obtention directe d'un résultat mais plutôt l'exposé d'une démarche, l'expression d'idées, la compréhension du problème et les liens établis avec les connaissances du candidat. La présentation de calculs menés correctement et écrits en langage mathématique est un aspect non négligeable à prendre en compte par le candidat.
De plus, chaque exercice proposé forme un tout. La capacité de prendre en compte les résultats des questions précédentes ou des données intermédiaires est partie intégrante de l'évaluation de la prestation du candidat. Un futur élève ingénieur doit être en mesure d'articuler et de synthétiser des données afin de répondre à un problème, en particulier quand chaque pas de démonstration est guidé.

Une épreuve orale

La spécificité de l'épreuve orale de Mathématiques repose sur la gestion de la préparation et sur la gestion du passage.
Le temps de préparation doit être consacré à la mise en relation de la demande de l'énoncé aux connaissances vues dans le cours aussi bien en première année qu'en deuxième année. Ce moment ne doit pas être réduit à une rédaction comme il serait attendu lors d'un écrit classique de concours. Par ailleurs, la lecture des exercices doit être attentive et complète. S'il est difficile pour un étudiant de finir l'intégralité d'une planche lors de la préparation, il n'en reste pas moins vrai qu'une lecture complète est nécessaire pour comprendre le problème dans sa globalité.
Lors du passage, certains candidats exposent de manière synthétique leurs idées, permettant ainsi d'avancer plus rapidement dans les exercices. Dans tous les cas, les candidats seront interrogés sur les deux exercices.
Les courbes et les graphiques peuvent être de bons supports pour peu que les axes et les points remarquables soient indiqués, mais ils ne constituent pas une démonstration. La connaissance des courbes usuelles est un attendu non négligeable (par exemple : tangente, inverse, sinus, etc.), en particulier en analyse où des arguments d'intégration se transposent en argument sur des aires. Cette approche graphique peut également être un premier pas pour se faire une idée de la valeur attendue d'une intégrale, notamment dans le cas des séries de Fourier. En algèbre, les plans et droites illustrent simplement des notions abstraites et permettent de mettre en avant une bonne compréhension du candidat sur l'étude des isométries.

Les capacités du candidat à communiquer, à échanger et à prendre en compte les remarques de l'examinateur sont également évaluées. Il est donc judicieux de noter une indication donnée au tableau avec la rigueur inhérente aux mathématiques. De plus, l'examinateur apporte une aide bienveillante et les remarques sont là pour favoriser la démarche de l'élève et non pas le contraindre. Il est dommage de voir qu'un candidat ne prenne pas en compte les remarques de l'examinateur.
Les examinateurs ont apprécié les prestations des candidats se mettant en position de dialogue pour des questions non abordées durant la présentation et se montrant enthousiastes à chercher au tableau. L'épreuve orale donne l'occasion à l'examinateur de vérifier les connaissances du candidat sur des domaines connexes à l'énoncé soumis, ainsi le tracé de courbes de référence, l'énoncé précis et exact d'un théorème, une série usuelle peuvent être demandés. Le deuxième exercice, par sa nature d'ouverture, nécessite une attention particulière sur les pistes indiquées par l'examinateur et met en avant la capacité de conjecture et de mobilisation de connaissances du candidat. Les examinateurs ont évalué positivement toute démarche proposée ou tests démontrant la capacité de modélisation et d'appropriation de l'énoncé. Ainsi, dans le cas d'un calcul de puissance n-ième de matrice, proposer le calcul des premiers termes sans pour autant aboutir à une relation de récurrence ou un résultat probant est perçu comme une capacité du candidat à l'appréhension du problème.

La gestion du tableau

La gestion du tableau fait également partie des éléments permettant à l'examinateur d'apprécier la qualité de la prestation du candidat. La présentation doit être claire, ordonnée et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Il est avisé de faire ressortir les résultats obtenus au tableau afin de faciliter leur utilisation dans la suite du problème.
On rappelle aux candidats qu'ils doivent demander avant d'effacer le tableau.
Le tableau doit être lisible pour qu'une discussion ou une aide basée sur les résultats et recherches du candidat puisse s'instaurer. Sans demander une calligraphie parfaite ou une rigueur excessive, un soin apporté à l'écriture en termes de symbolisme permet une meilleure lecture de l'examinateur et donc une aide plus aisée.

Remarques particulières en analyse

Les hypothèses du théorème d'intégration par parties, du théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, de Dirichlet (pour les séries de Fourier) doivent être citées sans que l'examinateur n'ait besoin de les réclamer. Le théorème des valeurs intermédiaires a été malmené lors de cette session.
Les développements limités sont dans l'ensemble connus et correctement appliqués au voisinage de 0.
Les thématiques des séries numériques et des intégrales impropres présentent les mêmes problèmes : les candidats ont trop l'habitude d'utiliser les différents critères de convergence et connaissent trop peu la définition de cette convergence, pourtant essentielle. On peut ainsi régulièrement voir un candidat appliquer un théorème élaboré de convergence par équivalent (et l'appliquer correctement) puis ne pas connaître la définition de la somme partielle d'une série. Les différents théorèmes au programme sont importants et les

méconnaître est évidemment sanctionné, mais les définitions de convergence d'une série ou d'intégrale généralisée sont fondamentales et doivent être connues.
Les sommes ne sont pas toujours bien maîtrisées, ces calculs peuvent vite devenir erronés sans une attention particulière aux notations. Les sommes de Riemann sont au programme, leur convergence sous hypothèse également ; cette session a été le théâtre d'une confusion avec le critère de Riemann pour les séries. Les exercices nécessitant le calcul d'une limite d'une somme de Riemann n'ont été que très rarement correctement résolus.
Le critère de D'Alembert est un outil lié à l'étude de la convergence d'une série, son énoncé correct peut être demandé. Une confusion a été perceptible chez plusieurs candidats entre ce critère et l'étude du quotient de deux termes consécutifs d'une suite. Un quotient n'a par ailleurs d'existence qu'après avoir vérifié la non nullité du dénominateur.
Les suites récurrentes d'ordre 2 nécessitent une connaissance convenable des formules inhérentes ; faire le lien entre celles-ci et la résolution d'équations différentielles ne doit pas occulter les spécificités de chaque partie du programme.
Les équations différentielles ont été bien traitées par les candidats sérieux et ayant appris leur cours. Un écueil concernant l'écriture des solutions des équations différentielles d'ordre 2 dans le cas d'une racine double a été soulevé. On rappelle que la résolution à l'aide d'une série entière exige la prise en compte du rayon de convergence.
Le calcul intégral a révélé des difficultés quant à la gestion des changements de variables et la transformation des éléments différentiels a été malmenée quand celles-ci n'ont pas été purement et simplement oubliées. Les changements de variable étant le plus souvent mentionnés dans les énoncés, l'enjeu de la question réside donc dans la gestion du calcul indiqué.
Lors de l'étude d'une intégrale impropre, s'attacher aux valeurs où l'intégrale n'est pas définie ou aux bornes de l'intervalle d'intégration ne doit pas se faire au détriment d'une étude correcte et rigoureuse sur l'ensemble de l'intervalle d'intégration. De trop nombreux candidats ne prennent pas le soin de préciser le comportement ou la nature de l'intégrande.

Remarques particulières en algèbre et en géométrie

Une représentation graphique est un support appréciable, utile et valorisé dans le cadre d'un exercice de géométrie, même si cela ne constitue pas une preuve. Peu de candidats y ont recours de manière naturelle sans la demande de l'examinateur. Les candidats sont invités à faire des figures de taille suffisante et à réfléchir au choix d'un système de coordonnées adapté au problème posé. Ajoutons qu'un repère n'a d'existence qu'avec une définition explicite de l'origine et de sa base : il s'agit bien d'une représentation symbolique d'une situation mathématique et non pas la réalisation d'un croquis à la va-vite. La compréhension du qualificatif « direct » a posé des difficultés.
Les exercices portant sur le gradient ont révélé des lacunes importantes quant à la représentation même de ces objets mathématiques. Un dessin pour étayer les propos est un réel plus dans la présentation d'un candidat.

Les termes points réguliers et points singuliers ont posé des difficultés à des candidats ne maîtrisant pas le vocabulaire.
Les exercices de géométrie et d'algèbre nécessitent parfois la résolution de systèmes linéaires ou non linéaires. Une résolution réfléchie et menée de manière claire dans des calculs ne demandant pas une technicité hors propos est fortement appréciée par l'examinateur. Le recours à la substitution n'est pas nécessaire de manière automatique et la diversité des méthodes proposées (notamment celle du pivot de Gauss) est appréciée à sa valeur par l'examinateur.
Les énoncés proposés nécessitent au minima de connaître les définitions de matrice orthogonale, matrice semblable, matrice inversible et matrice diagonalisable. La notion de trace et la propriété concernant l'égalité de trace entre deux matrices semblables sont bien connues.
La recherche de sous-espace propre du point de vue calculatoire ne pose pas de difficulté en termes de méthode.
Le calcul de déterminant est dans l'ensemble bien réalisé et l'écriture proposée au tableau est satisfaisante, la maîtrise en dimension n pose davantage de difficultés aux candidats les moins à l'aise. La trace et la transposée n'ont pas posé de difficultés en terme de connaissances.
Les questions portant sur les complexes ont révélé un certain nombre de faiblesses sur cette partie du programme et ont été clivantes en termes d'appréciation des prestations. Ne pas comprendre le terme « affixe », avec parfois une confusion avec le terme abscisse, dans un énoncé ou ne connaître que l'écriture algébrique d'un nombre complexe sont des lacunes inacceptables pour un futur élève-ingénieur. De même, échouer devant un calcul de module ou d'argument laisse une mauvaise impression à l'examinateur quant au sérieux du candidat. Dans le cadre d'exercices de géométrie, peu de candidats ont recours aux nombres complexes, alors qu'ils sont souvent un outil efficace dans la résolution de ces problématiques.
L'étude des matrices de transformations a divisé la population des candidats entre ceux connaissant leur cours et ceux n'ayant qu'une idée très vague et imprécise des matrices orthogonales. Les candidats ayant fait preuve de connaissances avérées sur la classification ont su transcender les éventuelles erreurs de calcul en expliquant de manière claire et posée leur démarche.
Si la définition d'endomorphisme est connue par une large majorité des candidats, la notion d'isomorphisme n'a pas eu la même réussite.
Enfin, une notion importante et mal comprise est la notion de dimension. De très nombreux candidats savent chercher une base d'un sous-espace vectoriel (en tout cas une famille génératrice), puis compter les éléments pour trouver une dimension. Mais très peu perçoivent la notion de dimension en tant que concept, notamment en tant que nombre de degrés de liberté. C'est pourquoi on attend d'un candidat qu'il soit capable de donner directement la dimension par exemple de $M_2(R)$ ou de $R_2[X]$, non en pensant à son cours, mais en réfléchissant rapidement aux degrés de liberté associés.
Parmi les méthodes usuelles de l'algèbre linéaire, les techniques de réduction de matrices sont en général bien connues. Cependant, la vérification d'appartenance d'un vecteur à un noyau ou à un espace propre sans avoir

recours à un protocole appris par cœur laisse entrevoir la limite d'un apprentissage par répétition exsangue de sens. L'oral est l'occasion de mettre en avant la polyvalence des méthodes et la mobilisation de la réflexion du candidat face à une question.

Les questions portant sur le produit scalaire ont posé des problèmes de connaissance de cours à un nombre non négligeable de candidats. Certains énoncent les critères comme une litanie sans être en mesure de préciser la réalité sous-jacente à ces termes.

Les exercices portant sur les courbes paramétrées ont été dans l'ensemble bien menés. La réduction du domaine d'étude et l'interprétation géométrique ont été les parents pauvres de cette partie du programme : la symétrie nécessite un domaine d'étude centré et permet une appréhension graphique de la courbe, tandis que la notion de tangente et de son obtention via la lecture d'un tableau de variation correctement rempli a posé des difficultés.

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ne se limite pas à la stabilité par combinaison linéaire d'éléments. La non-vacuité de l'ensemble est une exigence de la définition. Certains candidats gèrent difficilement un ensemble composé de fonctions. Un attendu de l'oral est la capacité à adapter et comprendre des connaissances apprises.

Remarques particulières en probabilités

Les candidats maîtrisant le vocabulaire et les techniques fondamentales en probabilité ont en général obtenu d'excellentes notes.

Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre garde de justifier le choix de leur réponse voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.

Il est à noter également que les lois usuelles ne sont pas connues ou alors de manière trop approximative pour permettre de répondre aux attentes de l'énoncé. Un effort devrait être porté sur la connaissance et la notation de l'univers image d'une loi, première donnée essentielle à une présentation plus calculatoire de la loi. Il a été noté une confusion entre univers image d'une variable aléatoire et univers des possibles d'une expérience aléatoire. Par ailleurs, les exercices de probabilités nécessitent de savoir calculer un cardinal et de manipuler du vocabulaire comme combinaison, liste, triplés, etc.

La formule des probabilités totales et la formule des probabilités conditionnelles ont été correctement utilisées dans l'ensemble. La notion fondamentale de système complet d'événements n'est pas citée de manière automatique. Il est utile de rappeler au candidat qu'il est maître de son oral et que chaque résultat doit être justifié de manière complète et sûre.

Enfin, il serait souhaitable que les candidats fassent un effort de réécriture des événements (à l'aide d'intersection, d'union, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul des probabilités. La confusion entre événement et probabilité est également à déplorer.

III - Conseils aux futurs candidats

Lors de la remise du sujet, les examinateurs recommandent de lire une première fois la totalité de l'énoncé et de partager équitablement le temps de préparation afin d'aborder les deux exercices. Dans la préparation de chaque exercice, il peut être judicieux de réfléchir, avant tout calcul, à la stratégie que l'on abordera.

Lors de la présentation orale, les candidats peuvent admettre des questions. Les examinateurs y reviendront en fin d'exposé si le temps le permet. Par ailleurs, il est inutile d'attendre l'assentiment de l'examinateur après chaque question. Cette session a accueilli de trop nombreux candidats attendant un signe de l'examinateur pour valider leur démarche. Les examinateurs sont dans une position bienveillante, mais l'oral reste une épreuve de concours, et non un moment de formation. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour obtenir une très bonne note. Enfin, les qualités de communication du candidat seront valorisées : clarté de l'expression, dynamisme de la présentation, etc.

Un exposé succinct mais précis des résultats obtenus est attendu. Dans cet esprit, il est inutile de recopier le détail des calculs au tableau. Il convient d'en indiquer les grandes lignes ainsi que le résultat final. L'organisation des calculs est primordiale, que ce soit pour la recherche d'une erreur ou l'appréciation de la prestation du candidat.

Les théorèmes utilisés seront cités et leurs hypothèses vérifiées avec soin. Il pourra aussi être judicieux d'illustrer ses propos par des figures en géométrie, ou des graphes de fonctions, ou un cercle trigonométrique lorsque que l'occasion se présente. Toute démarche est valorisée, l'oral est l'occasion de juger les capacités d'un candidat de proposer des idées et d'éclairer un tiers sur la démarche qu'il souhaite suivre.

Dans le cas où une question viendrait à poser problème, il est recommandé d'indiquer toutes les pistes explorées, ce qui permettra d'engager un dialogue avec l'examinateur. Rappelons à cet égard que les questions (ou les remarques) de l'examinateur ont pour but d'aider les candidats à s'interroger sur la pertinence de leurs résultats et à les remettre sur une bonne voie. En aucun cas, les remarques de l'examinateur ne visent à déstabiliser le candidat : il s'agit au contraire de le conduire à se poser les bonnes questions.

Globalement, les prestations des candidats sont assez satisfaisantes, tant sur le fond que sur la forme. Les examinateurs félicitent les candidats pour le sérieux de leur travail pendant ces années de préparation, et souhaitent bon courage aux futurs candidats.

IV - Évolutions de l'épreuve

Pour la session **2020**, le format de l'épreuve orale de mathématiques va évoluer.

- Préparation : 30 minutes

Chaque candidat recevra l'énoncé d'un exercice de mathématiques, avec un questionnement détaillé, contenant une ou deux questions nécessitant l'utilisation de Python, soit comme aide à la conjecture, soit comme illustration, soit comme outil de calcul numérique. Un ordinateur sera à disposition du candidat durant la préparation. Les interrogations porteront sur le programme de mathématiques, mais pourront s'appuyer sur des compétences du programme d'informatique pour tous.

- Interrogation : 30 minutes

Le candidat disposera d'un maximum de 20 minutes pour exposer au tableau l'exercice préparé, en se servant de l'outil informatique s'il le juge nécessaire. L'utilisation de Python en tant que support pour répondre à d'autres questions que celles spécifiquement identifiées comme nécessitant l'usage de l'outil informatique sera possible avec l'accord de l'examinateur. Dans le temps restant, une question ouverte non connue du candidat lors de sa préparation sera proposée à la lecture. Dans certains cas qui seront précisés, le candidat aura la possibilité de proposer des pistes mettant en œuvre Python, mais cela ne sera en aucun cas une obligation.

Afin d'aider les candidats à préparer cette épreuve, une dizaine d'exercices type, portant sur divers pans du programme, sera mis à disposition sur le site du Concours Commun INP dès l'automne 2018.