CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois problèmes totalement indépendants.

La rédaction comptera pour une part importante de la note.

Problème I

On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

I.1. **a)** Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est bien définie.

c) Déduire de la question **1.a)** que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0,1]$.

I.2. **a)** Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $f'(x)$.

On détaillera les calculs effectués.

Déterminer le tableau des variations de f sur $[0,1]$.

b) Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $f(x) \geq x$.

c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.

On se placera dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et on utilisera l'échelle suivante : 10 cm pour 1 unité.

On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.

Dans cette question uniquement, on suppose $u_0 = \dfrac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

I.3. **a)** Calculer $f(1)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ |1 - u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.

c) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Fin du premier problème

Problème II

Étude d'une intégrale

II.1. Justifier que $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

II.2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

a) Soit $A \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\mathrm{d}t = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer (et justifier) la limite de $A^{n+1}e^{-A}$ quand A tend vers $+\infty$.

c) En déduire que $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

II.3. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$.

Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $\mathbf{R}_3[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3.
Pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

II.4. Justifier rapidement en utilisant **II.3** que, pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

II.5. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X]\times\mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P,Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_3[X],\ \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X).$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est la famille $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$.

II.6. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

II.7. Vérifier que la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

II.8. Montrer alors que les valeurs propres de Φ sont 0, -1, -2 et -3.
L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

II.9. Pour tout $k \in \{0,1,2\}$, déterminer un vecteur propre P_k de Φ associé à la valeur propre $-k$ et dont le coefficient dominant vaut 1.
On présentera et on expliquera les calculs effectués.

On supposera dans la suite que P_3 désigne un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3 et de coefficient dominant égal à 1.

II.10. Soient P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$.

a) On pose $\quad f : t \longmapsto tP'(t)e^{-t}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $t \geq 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\Phi(P)(t)$ et de e^{-t}.

b) Montrer que

$$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

c) En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f'(t)Q(t)\mathrm{d}t$ avec $A \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\langle \Phi(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

d) En déduire que $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$.

II.11. On rappelle que, pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, P_i est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-i$.

Soient i et j dans $\{0,1,2,3\}$ tels que $i \neq j$.
En remarquant que $\langle \Phi(P_i), P_j\rangle = \langle P_i, \Phi(P_j)\rangle$, montrer que $(i-j)\langle P_i, P_j\rangle = 0$ puis que P_i et P_j sont orthogonaux.

II.12. En déduire que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Fin du second problème

Problème III

Rappels des notations

On rappelle que, pour X une variable aléatoire, $E(X)$ désigne l'espérance de X et $V(X)$ désigne la variance de X.

Étant donnés deux événements A et B, la notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Contexte

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3, ...
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

III.1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.
Déterminer la variance de X_0.

III.2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

III.3. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2),\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1),\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

III.4. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

III.5. Calcul de l'espérance

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.

b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.

c) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.

III.6. Calcul du moment d'ordre 2.
On rappelle la *formule de transfert :* pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \mathbf{P}(X = k).$$

a) En appliquant cette formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \dfrac{1}{4} E(X_n^2) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
On pourra utiliser les résultats de la question **III.5**.

d) On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfait la relation de récurence

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

e) Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ v_n = E(X_n^2) - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.

f) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n.

III.7. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n.

Fin du troisième problème

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1228 – D'après documents fournis