CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

# MATHEMATIQUES 2

**Durée : 3 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

$\boxed{\text{Les calculatrices sont interdites}}$

# La fonction *Dilogarithme*

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.
On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & t \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \\ 1 & t = 0 \end{cases}.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction *Dilogarithme* définie pour tout $x$ de $[-1, 1[$ par :

$$L(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Dans la partie I, on calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. La partie II est consacrée à une étude de la régularité de $f$. Dans la partie III, on détermine le développement en série entière de $L$ et on déduit ensuite le prolongé de $L$ en 1. Dans la partie IV, on résout une équation différentielle.

Les différentes parties de ce problème ont un lien entre elles, mais peuvent être traitées séparément.

## I. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, périodique de période $2\pi$, telle que :

$$\forall x \in ]-\pi, \pi], \quad g(x) = x.$$

Soit $S : x \longmapsto \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ la somme de la série de Fourier de $g$. On admet provisoirement l'existence de cette somme, existence qui sera démontrée à la question 4.

1. Représenter graphiquement la restriction de la fonction $g$ à l'intervalle $]-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la valeur de $a_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n-1}\,\dfrac{2}{n}$.
4. Pour quelles valeurs de $x$, a-t-on l'égalité $S(x) = g(x)$ ? On précisera le théorème utilisé, et notamment ses hypothèses.
5. En appliquant avec soin l'égalité de Parseval, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## II. Régularité de la fonction $f$

1. Donner le développement limité de $x \longmapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que $f$ est continue en 0.
3. $f$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser le nombre dérivé $f'(0)$.
4. Calculer pour tout $x$ de $]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[$, $f'(x)$.
5. Prouver que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
(On pourra à nouveau utiliser la question 1. de cette partie)

## III. Développement en série entière de $L$

On rappelle la fonction Dilogarithme définie pour tout $x$ de $[-1,1[$ par :

$$L(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

où la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1[$ (d'après la partie II).

1. Dérivée de $L$.
   1.a. Vérifier que la fonction $L$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1[$.
   1.b. Déterminer pour tout $x$ de $[-1,1[$, $L'(x)$.
2. Développement en série entière de $f$.
   2.a. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$.
   2.b. En déduire le développement en série entière de la fonction $f$ sur $]-1,1[$.
3. Prolongement par continuité de $L$ en 1.
   3.a. Montrer que $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ pour tout $x \in ]-1,1[$. Rappeler le théorème utilisé.
   On rappelle le théorème radial d'Abel :
   Soit une série entière de coefficients $(a_n)$, de rayon non nul $R$ et de somme $S$.
   On suppose que la série converge en un point $x_0$ tel que $|x_0| = R$. Alors :
   - si $x_0 = -R$, alors $\lim\limits_{x \to (-R)^+} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(-R)^n$,
   - si $x_0 = R$, alors $\lim\limits_{x \to R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

   3.b. Vérifier que le développement de la question précédente est encore valable en $x = -1$.
   3.c. Montrer que $L$ admet un prolongement par continuité en 1.

   On note désormais ce prolongement $L(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} L(x)$.

   3.d. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = L(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Application 1.
   On considère l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.
   4.a. Montrer que $J$ converge.
   4.b. Calculer en fonction de $\pi$ la valeur de $J$.
   (On peut utiliser le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$).
5. Application 2.
   5.a. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.
   (On peut par exemple dériver les deux membres de l'égalité).
   5.b. En déduire en fonction de $\pi$ la valeur de $L(-1)$.

# IV. Etude d'une équation différentielle

On se propose de résoudre dans $[-1, 1[$ l'équation différentielle $\mathcal{E}$ :

$$xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

où $y$ est une fonction réelle de la variable $x$.
On considère sur $[-1, 0[ \cup ]0, 1[$ l'équation différentielle $\mathcal{E}'$ :

$$xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

où $z$ est une fonction réelle de la variable $x$.
$K$ désigne un des deux intervalles $[-1, 0[$ ou $]0, 1[$ .

1.
   - 1.a. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}'$ sur $K$.
   - 1.b. Démontrer que les solutions de $\mathcal{E}'$ sur l'intervalle $K$ sont les fonctions $z$ de la forme : $x \longmapsto z(x) = f(x) + \dfrac{A}{x}$ où $A$ est une constante réelle.
2. En déduire que les solutions de $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $K$ sont les fonctions $y$ de la forme : $x \longmapsto y(x) = L(x) + A \ln |x| + B$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.
3. Soit $y$ une solution éventuelle de l'équation $\mathcal{E}$ sur $[-1, 1[$.
   - 3.a. Déterminer l'expression explicite de $y$ sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$.
   - 3.b. En exprimant la continuité et la dérivabilité de $y$ en 0, déterminer les solutions éventuelles de $\mathcal{E}$ sur $[-1, 1[$.
   - 3.c. Vérifier que les fonctions ainsi déterminées conviennent.

**Fin de l'énoncé**

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1324 – D'après documents fournis