CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'objectif du problème est de définir et d'étudier les notions de ***polynôme, de matrice et de système différentiel stable***.

La partie I traite le cas particulier de la dimension 2 et aborde un contre-exemple en dimension 3. La partie II introduit les outils théoriques qui se spécialisent dans la partie III pour montrer en partie IV le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilité des polynômes unitaires de degré 3. La partie V est une application de la partie IV à un système différentiel d'ordre 3 particulier.

La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties II, III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Le résultat principal de la partie II et celui de la partie IV sont résumés clairement en fin de partie.
Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Notations :
Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P qui sont dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont tels que : $P(\lambda) = 0$.
On dit que P est unitaire si P est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A, ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\det(A)$ le déterminant de A et χ_A le polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

L'ensemble $Z_{\mathbb{K}}(\chi_A)$ est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tMM = I_n \text{ est noté } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on définit Ax comme étant l'élément $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re e(z)$ la partie réelle de z, $|z|$ le module de z et $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

Définitions :
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est stable si :

$$\text{pour tout } \lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P),\ \Re e(\lambda) < 0.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est stable si χ_A est stable.

Partie I : STABILITE DANS DES CAS PARTICULIERS

Soient a et b deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.
On note z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

Soit $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I.1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.

I.2. On suppose dans cette question que $\Delta > 0$.

I.2.a. Vérifier que si P est stable, alors $a > 0$ et $b > 0$.

I.2.b. Montrer réciproquement que si $a > 0$ et $b > 0$, alors P est stable.

I.3. On suppose dans cette question que $\Delta = 0$.

Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

I.4. On suppose dans cette question que $\Delta < 0$.

I.4.a. Justifier que $z_2 = \overline{z}_1$.

I.4.b. Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

I.5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I.5.a. Exprimer χ_A en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

I.5.b. Etablir que A est stable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) < 0$ et $(-1)^n \det(A) > 0$.

I.6. On suppose dans cette question que $n = 3$.

I.6.a. Trouver les racines complexes de Q.

I.6.b. Vérifier que $\mathrm{Tr}(B) < 0$ et que $(-1)^n \det(B) > 0$.

I.6.c. Montrer que ni Q ni B ne sont stables.

Partie II : NORME SUBORDONNEE ET MESURE DE LOZINSKII

Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c.).

On admet que l'application $A \mapsto |||A|||$ définit ainsi une norme $|||\cdot|||$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.

II.1.

II.1.a. Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{K}^n$.

II.1.b. Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

II.1.c. Montrer l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}$, $\|Ax\| \leqslant \|Ax_0\|$. Cela justifie donc la définition de $|||A||| = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ et on a alors $|||A||| = \|Ax_0\|$.

II.1.d. Montrer que $|||I_n||| = 1$.

II.1.e. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leqslant |||A||| \cdot \|x\|$.

II.1.f. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A||| - |||B||| \leqslant |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||.$$

II.2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\Re e(\lambda) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right)$.

II.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right).$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiĭ de A (il dépend du choix de la norme initiale).

Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \frac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.

II.3.a. Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = |||u^{-1} I_n + A||| - |||v^{-1} I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

II.3.b. En déduire que si $0 < u \leqslant v$, alors : $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leqslant 0$.

II.3.c. Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-|||A||| \leqslant \mu(A, u) \leqslant |||A|||$.

II.3.d. En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} (\mu(A, u))$.

II.4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.4.a. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|(I_n + uA)x\| = |1 + u\lambda|$.

II.4.b. En déduire que : $\Re e(\lambda) \leqslant \mu(A)$.

II.4.c. Donner une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Le résultat principal de cette partie II est que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \Re e(\lambda) \leqslant \mu(A)$$

où

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right).$$

Partie III : NORMES ET MESURES DE LOZINSKII ASSOCIEES

Dans cette partie, à tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on associe la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et ${}^t\!X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique et de sa norme associée définis par les formules :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y\rangle = {}^t\overline{X}Y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

On remarque que ce produit scalaire et cette norme sur $\mathbb{C}^n$ donnent par restriction le produit scalaire canonique et sa norme associée sur $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = {}^t\!XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet que les réels $|||A|||$ et $\mu(A)$ sont les mêmes selon que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$ ou que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. On note alors ces deux réels $|||A|||_2$ et $\mu_2(A)$. On a ainsi :

$$|||A|||_2 = \sup_{x \in \mathcal{B}_2} (\|Ax\|_2) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_2 = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\}$$

$$\text{et } \mu_2(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA|||_2 - 1}{u} \right)$$

Dans toute cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $u > 0$:

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^t\!XX + u\,{}^t\!X({}^t\!A + A)X + u^2\,{}^t\!X\,{}^t\!AAX.$$

III.2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$ et

$${}^t\!A + A = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^t\!M.$$

III.3. On suppose dans toute cette question que $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$. On pose $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t\!MX$.

III.3.a. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

III.3.b. Vérifier que $\displaystyle\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2 + u^2\,{}^t\!X\,{}^t\!AAX$.

III.3.c. Montrer l'existence de deux réels γ et δ tels que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t\!XX = 1$, on ait : $\gamma \leqslant {}^t\!X\,{}^t\!AAX \leqslant \delta$.

III.3.d. Montrer que pour γ et δ choisis comme en III.3.c, on a, pour tout $u > 0$:

$$\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leqslant |||(I_n + uA)|||_2 \leqslant \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.$$

III.3.e. En déduire que $\displaystyle\mu_2(A) = \frac{\alpha_1}{2} = \max\left\{\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\frac{{}^t\!A + A}{2}\right)\right\}$.

III.4. Soit H une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|x\|_H = \|Hx\|_2$.
On admet que l'on définit ainsi des normes sur $\mathbb{C}^n$ comme sur $\mathbb{R}^n$ qui donnent sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une même norme subordonnée notée $|||\cdot|||_H$ et une même mesure de Lozinskiĭ notée μ_H.

III.4.a. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_H = |||HAH^{-1}|||_2$.

III.4.b. En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$.

Partie IV : UN CRITERE DE STABILITE EN DEGRE 3

Soient a, b et c trois réels.
On considère le polynôme réel P unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si :

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad c > 0 \qquad \text{et} \qquad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3).$$

IV.1. Montrer que : $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $\quad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, $\quad c = -z_1z_2z_3 \quad$ et

$$ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3.$$

IV.2. Montrer que l'une des racines de P est un nombre réel.

On suppose dans toute la suite de cette partie que z_1 est un réel qui sera noté α_1 et que z_2 et z_3 s'écrivent sous la forme $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ et $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ avec des réels $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ et β_3.

IV.3. On suppose dans cette question que $\beta_2 = 0$.

IV.3.a. Montrer que $\beta_3 = 0$.

IV.3.b. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.4. On suppose dans cette question que $\beta_2 \neq 0$.

IV.4.a. Justifier que $\alpha_3 = \alpha_2$ et que $\beta_3 = -\beta_2$.

IV.4.b. Vérifier que : $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $\quad b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$, $\quad c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \quad$ et

$$ab - c = -2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 4\alpha_1\alpha_2^2.$$

IV.4.c. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.5. Montrer que si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, alors $\Re e(z_1), \Re e(z_2)$ et $\Re e(z_3)$ sont non nuls.

IV.6. On suppose dans cette question que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

On pose alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c' & 0 & 1 \\ 0 & -b' & -a' \end{pmatrix}$ avec $a' = a$, $b' = \dfrac{ab - c}{a}$ et $c' = \dfrac{c}{a}$ si bien que a', b' et c' sont trois réels strictement positifs.

On note H la matrice diagonale inversible suivante : $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{a'b'c'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a'b'} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$.

On pose $B' = HA'H^{-1}$.

IV.6.a. Montrer que $\chi_{A'}(X) = -P(X)$.

IV.6.b. Calculer explicitement B' et vérifier que : $\dfrac{{}^t\!B' + B'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

IV.6.c. En déduire que $\mu_H(A') = 0$.

IV.6.d. En conclure que P est stable.

Le résultat principal de cette partie IV est que :

un polynôme à coefficients réels, unitaire de degré 3 est stable si et seulement si ce polynôme vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

Partie V : EXEMPLE DE SYSTEME DIFFERENTIEL STABLE

Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère le système différentiel (S) suivant, d'inconnue $t \mapsto X(t)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X'(t) = CX(t).$$

On dit que ce système différentiel (S) est stable si, quelle que soit la solution X de (S), on a :

$$\lim_{t \to +\infty} (X(t)) = 0.$$

V.1. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

V.2. En déduire que C est stable.

V.3. Montrer l'existence d'une matrice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et de trois réels $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ et $\beta_2 \neq 0$, tels que : $C = UDU^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix}$.

On ne cherchera pas à trouver explicitement U ni les réels α_1, α_2 et β_2.

V.4. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = U^{-1}X(t)$.

V.4.a. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $Y'(t) = DY(t)$.

V.4.b. En déduire l'expression de $Y(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ dans ce cas.

V.4.c. Montrer qu'il existe X_1, X_2 et X_3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$X(t) = e^{\alpha_1 t} X_1 + e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t) X_2 + e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t) X_3.$$

On ne cherchera pas à trouver explicitement les matrices X_1, X_2 et X_3.

V.4.d. Vérifier que le système différentiel (S) est stable.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1312 – D'après documents fournis