CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Jeudi 3 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

Q1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{vect}\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F.

Q3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \mathrm{d}t \right]$.

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

EXERCICE II

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q4. Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{n}{n} \dfrac{n-1}{n} \dots \dfrac{n-k+1}{n} \right] = 1$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q5. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q6. Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0{,}6}$.

PROBLÈME

On note, pour n entier tel que $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.

On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$ (chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si T est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A . \det C$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : "une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$".

Pour cela on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Q7. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ $(p \geq 1)$ les valeurs propres distinctes de u. Démontrer que le polynôme $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)....(X-\lambda_p)$ est annulateur de u.

Q8. Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ sont r nombres réels distincts $(r \geq 1)$ tels que $Q = (X-\mu_1)(X-\mu_2)....(X-\mu_r)$ est un polynôme annulateur de u. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q9. On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D vérifiant : $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

Q10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q11. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs : $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

Q12. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q13. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Q14. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Q15. On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Q16. Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X. En déduire la valeur de la matrice A.

Q17. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q18. On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q19. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

Q20. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u.
On pourra s'inspirer de la question **Q10**.

Q21. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème (page **4**), démontrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

Q22. Utiliser la question **Q21** pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

(on ne demande pas de détails).

Q23. Sachant que la solution φ sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = MX$ vérifiant $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est la fonction $t \mapsto e^{tM} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où e^{tM} désigne l'exponentielle de la matrice tM, déterminer la matrice e^M.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1053 – D'après documents fournis