CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Mardi 2 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, avec $n \in \mathbb{N}$.
Dans l'ensemble de l'exercice, P_1, P_2, P_3 désignent trois polynômes distincts de $\mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts.
On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Q1. Soient les polynômes :

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}(X - a_2)(X - a_3), \\[2ex] L_2 = \dfrac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}(X - a_1)(X - a_3), \\[2ex] L_3 = \dfrac{1}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2). \end{cases}$$

- **a)** Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$.
- **b)** Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **c)** Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

Q2. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q3. L'application f est-elle surjective ? On pourra s'intéresser aux degrés respectifs des polynômes P_1, P_2, P_3 et $f(P)$ pour $P \in E$.

Q4.
- **a)** On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
  Montrer que, dans ce cas, P appartient à $\ker(f)$ si et seulement si les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P.
- **b)** On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.
  Montrer que, dans ce cas, il existe un polynôme P non nul et non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$, appartenant à $\ker(f)$.
  On pourra exprimer P en fonction des polynômes L_1, L_2 et L_3.
- **c)** L'application f est-elle injective ?

Partie II - Restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$

On suppose dans cette partie que la famille de polynômes $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ est une famille libre de E_n et que n est un entier naturel **supérieur ou égal à 3**.

Q5. Montrer que la restriction de f à E_n définit un endomorphisme de E_n.

On notera désormais f_n l'application définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccl} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & f_n(P) = f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3 \end{array}.$$

Q6. On rappelle que $\mathrm{Im}(f_n)$ et $\ker(f_n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Vect}(P_1,\ P_2,\ P_3)$.

b) Montrer que $\dim\big(\ker(f_n)\big) = n - 2$.

c) Déterminer une base de $\ker(f_n)$.

Q7. On suppose, dans cette question uniquement, que les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont de degré 2 et admettent pour racines respectivement a_2 et a_3, a_1 et a_3, a_1 et a_2.

a) Montrer que la réunion de la famille $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ et de la base de $\ker(f_n)$ déterminée à la question **Q6.c)**, constitue une base de E_n.

b) Montrer que f_n est un endomorphisme diagonalisable.

Partie III - Étude d'un cas particulier avec $n = 3$

Dans cette partie $n = 3$, $E_3 = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 2X, \quad P_3 = -3X + 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1.$$

Q8. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ est-elle libre ou liée ?

Q9. Déterminer la matrice de f_3 dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ de E_3.

Q10. Déterminer $\ker(f_3)$ et une base de $\ker(f_3)$.

Partie IV - Étude d'un cas particulier avec $n = 6$

Dans cette partie $n = 6$, $E_6 = \mathbb{R}_6[X]$ et :

$$P_1 = X^2 - 3X + 2, \quad P_2 = X^2 - X - 2, \quad P_3 = 2X^2 - 2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

Q11. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ est-elle libre ou liée ?

Q12. Déterminer $\ker(f_6)$ et une base de $\ker(f_6)$.

Q13. **a)** L'endomorphisme f_6 est-il diagonalisable ?

b) Préciser le spectre de f_6 et la multiplicité des valeurs propres de f_6.

Exercice 2

On dispose de deux pièces de monnaie différentiables, dénommées dans la suite de l'exercice "pièce 1" et "pièce 2". On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec l'une ou l'autre pièce selon un protocole décrit ensuite. Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé.
Pour chaque pièce, l'obtention du côté pile au cours d'un lancer peut être modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre p_1 pour la première pièce et de paramètre p_2 pour la seconde pièce. On a : $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère les évènements suivants :
- "le i−ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile", noté P_i,
- "le i−ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face", noté $F_i = \overline{P_i}$,
- "le i−ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile", noté P'_i,
- "le i−ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face", noté $F'_i = \overline{P'_i}$.

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où Ω désigne l'ensemble des séries de n lancers possibles, on a : $P(P_i) = p_1$, $P(F_i) = q_1 = 1 - p_1$ et $P(P'_i) = p_2$, $P(F'_i) = q_2 = 1 - p_2$.

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard et on effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.
On itère le processus jusqu'au n^e lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsqu'on obtient face.

On note C_1 l'évènement "choisir la pièce 1 au premier lancer" et C_2 l'évènement "choisir la pièce 2 au premier lancer". On a $P(C_1) = P(C_2) = \dfrac{1}{2}$.

Q14. Dans cette question, on considère une série de 2 lancers ($n = 2$).

a) Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?

b) On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

Q15. Dans cette question, on considère une série de 6 lancers ($n = 6$).

a) On suppose que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer.
On note A l'évènement : "obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1, puis deux fois pile avec la pièce 2".
Déterminer $P(A)$ en fonction des données p_1 et p_2.

b) On suppose que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer.
On note B l'évènement : "jouer cinq fois de suite avec la pièce 2, puis jouer le sixième lancer avec la pièce 1".
Déterminer $P(B)$ en fonction des données p_1 et p_2.

c) Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivants avec deux pièces différentes ?

d) Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?

Q16. Dans cette question, on considère une série de 12 lancers ($n = 12$).
Sachant que l'on a effectué le dixième lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le douzième lancer avec la pièce 2 ?

Q17. Dans cette question, on considère une série de n lancers, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On note D_n l'évènement "on utilise la pièce 1 pour la première fois au $n-$ième lancer".

a) Déterminer $P(D_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : distinguer les cas $n = 1$ et $n > 1$.

b) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} P(D_n)$ converge et calculer sa somme.

c) En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'évènement "ne jamais utiliser la pièce 1" ?

Pour la suite de l'exercice, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on effectue N lancers selon le protocole étudié précédemment. On gagne 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 1 et on perd 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 2.
La variable aléatoire X_N désigne le nombre de points obtenus à l'issue des N lancers. X_N peut donc prendre des valeurs entières $k \in [\![-N, N]\!]$.
La variable aléatoire U_N désigne le nombre de fois où on joue avec la pièce 1 au cours des N lancers.

Q18. Déterminer $P(X_N = N)$ et $P(X_N = -N)$.

Pour la suite de l'exercice, on pose $p_1 = p_2 = 0,3$.

Q19. Dans cette question, on suppose $N = 3$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3.

b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_3 : $E(X_3)$.

Q20. Dans cette question, on suppose $N \geq 2$.

a) Soit $k \in [\![-N, N]\!]$. Exprimer l'évènement "$X_N = k$" en fonction de U_N.

b) En déduire $P(X_N = N - 1)$.

c) Que vaut $P(X_N = 0)$ lorsque N est un entier impair ?

d) Déterminer $P(X_N = N - 2)$ et $P(X_N = -N + 2)$.

Problème

On note I l'intervalle $]-1,+\infty[$. Soit la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Partie I - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction φ définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \geq -1,\ \varphi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1) - (1+2x).$$

Q21. Calculer les dérivées φ' et φ'' et préciser les valeurs $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Q22. Etudier les variations de φ sur I. On étudiera la limite de φ' en $+\infty$.

Q23. En déduire que φ est strictement négative sur $[-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

Partie II - Étude de la fonction f

Q24. **a)** Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.
b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Q25. Montrer que la fonction f est strictement monotone sur I.

Q26. Soit la fonction g définie sur I par : $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) - x$.
a) Déterminer le sens de variation de g.
b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$.
c) Montrer que : $0,4 \leq \alpha \leq 0,6$.
d) Déterminer le signe de g sur I.

Q27. On considère les fonctions ψ et h définies sur I par :

$$\psi(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que h est développable en série entière sur $]-1,+\infty[$.
b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
c) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = (-1)^n \times n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}.$$

d) Si f était développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$, quelle serait la forme de ce développement ?

Q28. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{(1+t)t} \mathrm{d}t$.

Partie III - Étude d'une suite récurrente

Q29. On admet que la fonction dérivée f' est strictement croissante sur I.
Montrer que : $\forall x \in [0,4\,;\,0,7]$, $|f'(x)| \leq 0,8$.

Q30. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,4\,;\,0,7]$.

Q31. **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,8 \times |u_n - \alpha|$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie IV - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$x(x+1)y'(x) + (1 + 3x + x^2)y(x) = 1 \qquad (E).$$

Q32. Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.

Indication : on pourra décomposer $\dfrac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Q33. On cherche à déterminer une solution de (E) sur $I =]-1, +\infty[$. Soit y une telle solution.

a) Donner les expressions vérifiées par y sur I_1 et I_2.

b) Déterminer, en utilisant la continuité de y en 0, les valeurs des constantes d'intégration intervenant dans les expression de y obtenues à la question précédente.

c) Vérifier que la fonction y ainsi définie est effectivement dérivable en 0 et solution de (E) sur I.

d) Vérifier que f est l'unique solution de (E) sur I.

Q34. On cherche à déterminer les séries entières solutions de (E) sur $]-R, R[$ avec $R > 0$.

a) En écrivant $\forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, établir les équations vérifiées par les coefficients a_n lorsque y est solution de (E).

b) Montrer, en utilisant une récurrence à deux pas, que les coefficents a_n vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est égal à 1.

Q35. Déduire des questions précédentes qu'il existe $r > 0$, tel que que f est développable en série entière sur $]-r, r[$. Préciser la forme du développement en série entière et donner la valeur maximale de r.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1197 – D'après documents fournis